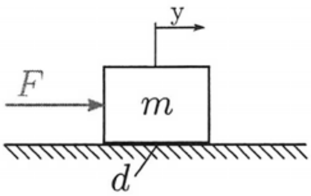
Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgenden mechanischen Aufbau mit der Masse m:



Die Masse wird mit Hilfe der äußeren Kraft F in Bewegung gesetzt, wobei der Bewegungsvorgang reibungsbehaftet (Reibbeiwert d) ist. Auf die Masse wirken somit die Kraft F und die *geschwindigkeitsproportionale* Reibkraft. Die Position y der Masse wird gemessen. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun das System für konkrete Parameterwerte:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$.

c) Ist das System asymptotisch stabil bzw.BIBO-stabil? *Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*

d) Bestimmen Sie für die Eingangsgröße $u = \sigma(t)$ den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, falls dieser existiert.
(Mit $\sigma(t)$ wird hierbei die Einheitssprungfunktion bezeichnet)

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Im Rahmen von Experimenten wurden mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ und den Eingangsgrößen

$$u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) = \sigma(t) \qquad \text{bzw.} \qquad u^{(3)}(t) = u^{(4)}(t) = 0$$

vier verschiedene Lösungen für das System ermittelt:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -2 + 3e^{t} \\ 0.5 + 0.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} + 3e^{t} \\ 0.5 + 1.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

a) Bei einem der vier Experimente hat sich in die Lösung ein Fehler eingeschlichen. Bestimmen Sie die fehlerhafte Lösung und geben Sie eine mathematische Begründung an.

b) Bestimmen Sie die Anfangszustände $\mathbf{x}_0$ zu den drei richtigen Lösungen.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Linearität die Lösung $\mathbf{x}^{(5)}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(5)} = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u^{(5)}(t) = \sigma(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -8 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

b) Führen Sei eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ mit der Matrix $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ durch und geben Sie das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \qquad y = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z}$$

an.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$.

d) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion und erstellen Sie einen PN-Plan.

e) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

f) Bestimmen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter. Eine Person behauptet, dass die Systemmatrix folgende Eigenwert-Paare s_1 und s_2 besitzen kann:

$$(i) \; \begin{matrix} s_1 = 2 \\ s_2 = 2 \end{matrix} \qquad (ii) \; \begin{matrix} s_1 = 1 + j \\ s_2 = 1 - j \end{matrix} \qquad (iii) \; \begin{matrix} s_1 = -1 + 2j \\ s_2 = -2 - 2j \end{matrix}$$

a) Sind diese 3 Eigenwert-Konfigurationen prinzipiell möglich?

b) Bestimmen Sie die zu den möglichen Eigenwert-Paaren gehörigen Parameter α und β.

CS1 27.3.2015

1) $F_a = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$ $F - F_R = F_a$ $F_R = d \cdot \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{F - d\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt}}$ $u = F$

geschw.-prop. (lt. Angabe)

$x = \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $v = \frac{ds}{dt}$

I: $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ II: $\frac{dx_2}{dt} = \frac{u}{m} - x_2 \cdot \frac{d}{m}$

a) $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$ $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 0 \cdot u$

b) $G(s) = c^T \cdot \underbrace{(sE - A)^{-1}}_{\Phi(s)} b + d$

$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+2)}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} = \underline{\underline{\frac{1}{s(s+2)}}}$

asympt. stabil: alle Eigenwerte müssen $Re\{s^i\} < 0$ haben, ↯ nicht erfüllt

$\det(sE - A) = s(s+2)$

$\Rightarrow s_1 = 0 \quad s_2 = -2$

<u>nicht asympt. stabil!</u>

BIBO-stabil: die gekürzte Übertr.-Fkt. darf keine Polstellen mit $Re\{\} \geq 0$ haben ↯ nicht erfüllt

<u>nicht BIBO-stabil!</u>

c) $u(t) = \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; u(s) = \frac{1}{s}$

$$y(s) = g(s) \cdot u(s)$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot y(s) \right)$$ (s. Skriptum)

$\Uparrow$

Wenn das Nenner-Polynom von $s \cdot y(s)$ ein Hurwitz-P. ist, existiert der Grenzwert von $y(t)$

$$s \cdot y(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$ Kein HW-Polynom!

$\lim_{t \to \infty} y(t)$ existiert nicht!

2) a) System der Ordnung 2 $\Rightarrow$ 2 EW!

in Lsg. 3 gibt es 3 EW ↯

b) $t=0$ setzen: $x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ $x_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\Gamma\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma\right) = ??$

$x^{(1)}(t) = \Gamma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \sigma\right)$ $x^{(4)}(t) = \Gamma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0\right)$

$$x^{(5)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(4)}(t) = \Gamma\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 2e^{t} \\ 0{,}5 - 0{,}5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3) a) $\det(sE-A) = (s-9)(s+13) + 8\cdot 15 \overset{!}{=} 0$

$$s^2+4s+3 \overset{!}{=} 0 \qquad s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$\operatorname{Re}\{s^i\} < 0 \checkmark \qquad s_1 = -3 \quad s_2 = -1$$

Ja, System ist asymptotisch stabil

b) $\tilde{A} = T\cdot \underbrace{A\cdot T^{-1}}$ $\quad \tilde{b} = T \cdot b \quad \tilde{c}^T = c^T\cdot T^{-1}$

weil $z = Tx \Rightarrow T^{-1}z = x$ $\neq$ Skriptum!

$$\tilde{d} = d \ (=0)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -8 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

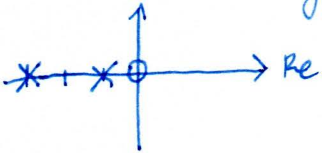
$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z$$

c) $G(s) = c^T\cdot(sE-A)^{-1} b + d$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-9 & -15 \\ 8 & s+13 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-9)(s+13)+120}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+13 & 15 \\ -8 & s-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s+2 \\ s-1 \end{bmatrix} = \frac{s}{(s+3)(s+1)}$$

d) $G(s) = \frac{s}{(s+3)(s+1)}$ NS: $s = 0$



PS: $s = -3$ u. $s = -1$

e) Alle PS haben $Re\{\} < 0$ $\Rightarrow$ BIBO-stabil!

f) $y(s) = G(s)\, u(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \Rightarrow \text{PBZ} \Rightarrow -\frac{1}{2(s+3)} + \frac{1}{2(s+1)}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)}}$

4) $\det(sE-A) = (s-\alpha)(s-\beta)+1 \overset{!}{=} 0$

$$s^2 - (\alpha+\beta)s + \alpha\beta + 1 = 0$$

a) i) und ii) sind möglich, da rein reell bzw.
paarweise konj. komplex

iii) nur mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ möglich

b) i) $(s-\alpha)(s-\beta)+1 \overset{!}{=} (s-2)^2$

$$s^2 - (\alpha+\beta)s + \alpha\beta+1 = s^2-4s+4$$

Koeff.-Vgl.:

$$\alpha+\beta = 4 \Rightarrow \alpha = 4-\beta$$
$$\alpha\cdot\beta+1 = 4$$
$$\beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 3$$
$$\alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = 1$$

ii) $(s-\alpha)(s-\beta)+1 \overset{!}{=} (s-1+j)(s-1-j)$

$$(s-\alpha)(s-\beta)+1 = (s-1)^2 - j^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 1$$